

同心球状空洞共振器における縦波モードの共振周波数

戸上 良弘^{†a)} (正員)Resonance Frequency of Longitudinal Wave Mode in a Concentric Spherical Cavity
Yoshihiro TOGAMI^{†a)}, Member

あらまし 一組の同心球面で囲まれた空洞の基本振動は、動径方向に振動する球面波である。球面波のスカラポテンシャルは、電界は縦波となり磁界は生じないため、TE, TM 波など従来のモードとは異なる縦波モードとなる。この縦波モードの共振周波数を厳密解として示した。

キーワード 球面波, スカラポテンシャル, 縦波モード, 等価回路, 厳密解

1. ま え が き

一般的な球形空洞共振器の共振モードは、内部に波源のない定在波であるとして、極座標における波動方程式を解いて求められる [1]。その解は、接線方向にのみ電界が存在する（動径方向には電界が存在しない）TE 波か、接線方向にのみ磁界が存在する（動径方向には磁界が存在しない）TM 波となる。

本論文で対象にしている同心球状空洞は、図 1 (a) のように二つの球面で囲まれた形状をしている。このような形状では、TE 波や TM 波以外に動径方向に振動する球対称の球面波が基本振動モードとして加わることになる。球面波としてのスカラポテンシャルの電界は、波の進行方向に振動する縦波となり、磁界は球の対称性から生じない [2]。電界も磁界も波の進行方向に対して垂直（接線方向）にならないため、横波を前提とした分類である TE/TM/TEM 波のうち、どのモードにも属さない。しいていえば TM 波における磁界が縮退したモードと考えられるが、従来見逃されてきたモードであることには違いない。本論文ではこれを

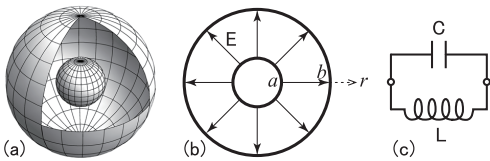


図 1 同心球状空洞共振器 (a) 形状 (b) 電界 (c) 等価回路
Fig.1 Concentric Spherical Cavity. (a) Shape, (b) Electric field, (c) Equivalent circuit.

[†] 帝塚山学院大学人間科学部, 堺市

Faculty of Human Sciences, Tezukayama Gakuin University,
4-2-2 Harumidai, Minami-ku, Sakai-shi, 590-0113 Japan

a) E-mail: togami@hs.tezuka-gu.ac.jp

“縦波モード” と呼び、このモードを対象としている。

2. 区間存在球面波

球面波としてのスカラポテンシャル ϕ は、 ω を角周波数、 k を波数、 ϵ_0 を真空の誘電率として、

$$\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1)$$

と表される [2]。位相項 $e^{i(\omega t - kr)}$ は外向き、 $e^{i(\omega t + kr)}$ は内向きの球面波を表している。一般に内向きの球面波は考えにくいことから、外向きの球面波のみを物理的実在と考えることが多いが、本論の場合は外面を起点とした内向きの球面波も解の候補となる。 q_0 は電荷の大きさであり、波源の大きさともいえる。また、 ϕ は時間的に変化する電荷 $q_0 e^{i\omega t}$ の遅延（または先進）ポテンシャルと捉えることもできる。

スカラポテンシャル ϕ の勾配を計算する。球の対称性から r 方向の成分だけをもち、 r 方向の単位ベクトルを \mathbf{u}_r とし、

$$-\nabla\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \pm ik \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

となる。これが電界 \mathbf{E} と、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の時間変化の和、 $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ に等しい。よって電界 \mathbf{E} は次式のように表せる [2]。

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (3)$$

式 (1) の球面波が内径 a 、外径 b ($a < b$) の区間内にも存在する場合を考える。図 1 (b) のように電界 \mathbf{E} も区間内にも存在し、内径 a 、外径 b のところで不連続となる。電界の不連続点（面）には、それに対応する（表面）電荷が生じる。

3. 縦波モードの共振周波数

一般に波動モードごとに異なる境界条件を解いて共振周波数を求める．例えば TE 波の場合は内径 a と外径 b における電界の接線成分が 0 になることから求め、TM 波の場合は磁界の接線成分が円周方向に一周したとき連続になる条件から求める [1], [3].

本論の縦波モードの場合、磁界は恒等的に 0 となり、電界は境界面に垂直となる [2]. 電界は時間的に変動するため位相によって境界面に生じる電荷の状態が異なる．しかし位相は相対的なものであるので、本論の場合は初期位相を境界条件には利用しにくい．

空洞共振器に回路理論を適用できる場合がある．球面波の電流と変位電流は、同量逆向きであるため [2], 半径 r 方向に往復する閉回路を形成する．つまり内面 a と外面 b は電流と変位電流の折り返し地点であり、キルヒホッフの電流則を満たしている．また、任意の閉回路にそった電位の和は 0 になるというキルヒホッフの電圧則に対応する電界は、ベクトルポテンシャルを含むものと考えられる [4]. 特に本論の場合見かけ上磁界が生じないことから、ベクトルポテンシャルを含む式 (2) を広義の電界と捉え、電界のエネルギー密度の計算式からエネルギー密度を見積もる．

$$\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi)(\nabla\phi^*) = \frac{q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2} \right) \quad (4)$$

ここで、 ϕ^* は ϕ の複素共役である．波動の存在区間 $[a, b]$ を球殻 $4\pi r^2 dr$ で定積分すると全エネルギーが求まる．

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi)(\nabla\phi^*)4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} k^2(b-a) \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) の意味を考える．一般に内径 a 、外径 b の球形コンデンサのキャパシタンス C は、

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1} \quad (6)$$

与えられる．式 (5) 右辺第一項は、球形コンデンサに電荷 q_0 が蓄えられたときの電気エネルギー $\frac{q_0^2}{2C}$ と等価である．次に右辺第二項の意味を考える．電荷の時間変化から、電流の大きさは $I_0 = \omega q_0$ と表せる． $\omega = kc$, $1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$ (c は光速, μ_0 は真空の透磁率) の関係を用い、更に定数 L を次のように置くと、

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}(b-a) \quad (7)$$

右辺第二項は $\frac{1}{2}LI_0^2$ と表される．よって電流のエネルギーと考えられる．図 1 (c) に等価回路を示す．

一般に空洞共振器では電界と磁界のエネルギーは互いに等しい．式 (5) で電気と電流のエネルギーである右辺第一項と第二項が互いに等しいと置き、

$$k^2ab = 1 \quad (8)$$

という関係式が得られる．共振周波数 f は、 $kc = \omega = 2\pi f$ の関係より次式で表される [5].

$$f = \frac{c}{2\pi\sqrt{ab}} \quad (9)$$

4. 計算例

計算の一例を示す．地球の地表と上空の電離層の間には、シューマン共振 (Schumann resonance) とよばれる電気振動が観測される．その基本波の実測値は、約 8Hz であることが知られている [3].

地球の半径を 6378km、その上空 50km のところに電離層があるとして式 (9) に代入し、

$$f = \frac{3.0 \times 10^8}{2\pi\sqrt{6378 \times (6378+50)} \times 10^3} = 7.46 \quad (10)$$

約 7.5Hz と計算される [5]. TM 波として計算した最低周波数 10.6Hz [3] よりも実測値に近い値が得られた．

5. む す び

球対称球面波の電界は縦波となる．同心球状空洞共振器において縦波モード共振周波数の計算式 (厳密解) を求めた．シューマン共振の計算値から式の妥当性を示した．共振周波数 f は内径 a と外径 b の相乗平均に反比例することが分かった．

文 献

- [1] 細野敏夫, “球面波とその応用,” 電磁波工学の基礎, 第 17 章, 昭晃堂, 東京, 1973.
- [2] 戸上良弘, “球面波における Maxwell 方程式の厳密解,” 信学論 (C), vol.J97-C, no.2, pp.79–82, Feb. 2014.
- [3] J.D. Jackson, “空洞共振器としての地球と電離層: Schumann 共振,” ジャクソン電磁気学原書第 2 版 (上), 西田稔 (訳), 第 8 章 9 節, 吉岡書店, 京都, 1994.
- [4] 岡部洋一, “ポテンシャルと回路理論,” 電磁気学の意味と考え方, pp.84–85, 講談社サイエンティフィック, 東京, 2008.
- [5] 戸上良弘, “同心球面対における共振回路,” 帝塚山学院短期大学研究年報, vol.46, pp.62–74, 1998.

(平成 26 年 1 月 15 日受付, 3 月 17 日公開)