ショートノート

球面波における Maxwell 方程式の厳密解

戸上　良弘[†a)]（正員）
Exact Solutions for Spherical Wave via Maxwell's Equations
Yoshihiro TOGAMI[†a)], *Member*

[†] 帝塚山学院大学人間科学部，堺市
Faculty of Human Sciences, Tezukayama Gakuin University, 4–2–2 Harumidai, Minami-ku, Sakai-shi, 590–0113 Japan
a) E-mail: togami@hs.tezuka-gu.ac.jp

あらまし　本論文では，球面波のスカラポテンシャルに対応する Maxwell 方程式の解析解を求めた．球面波における変位電流密度の大きさは，電流密度の大きさに等しく，それらは互いに反対方向に誘導されることがわかった．

キーワード　球面波，マクスウェル方程式，スカラポテンシャル，ベクトルポテンシャル，縦波

1. ま え が き

自然界において，球はもっとも基本的な形状である．それゆえ球面波は平面波と同等か，それ以上に基本的な波動であるといえよう．しかしながら，平面波としての電磁波に比べて球面波におけるそれは，十分な考察がなされているとはいい難い．その理由として，極座標でのベクトル計算が直交座標でのそれよりも煩雑になること，特異点となる中心の扱い方が難しいこと，波源の存在が物理的実在と結び付けて想定しにくいこと，などが挙げられる．

もっとも双極子が作る電磁波は，多くの電磁気学の教科書が扱っている．本論文で対象にしているのは，いわば単極子が作る完全な球対称としての電磁波である [1]．

2. Maxwell 方程式のポテンシャル表現

電磁気学の基本となっている Maxwell 方程式は，一般に次の四つの式で表される．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

式 (1) は，クーロン（Coulomb）の法則で，ρ は電荷密度を表し，ε_0 は真空の誘電率である．式 (2) は，磁荷が存在しないことを表す式である．式 (3) はファラデー（Faraday）の法則であり，磁界の変化と電界の回転との関係を表すものである．式 (4) は変位電流の存在を含めたアンペール（Ampère）の法則を表しており，電流や変位電流の存在と磁界の回転と関係を表している．なお，μ_0 は真空の透磁率である．これら四つの式は，電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{B}$ を基本物理量としてその関係を表した式であり，EB 対応の表現といわれている．磁界が磁極ではなく電流に由来するという立場の表現方法である [2]．

電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{B}$ は，観測される物理量であるため，実験や観測データから値を求める場合には便利である．一方，量子力学などではポテンシャル（スカラポテンシャルとベクトルポテンシャル）の方がより基本的な物理量であると考えられている．本論文では，球面波であるスカラポテンシャル ϕ の存在を仮定して，そこから電界 $\boldsymbol{E}$ やベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導く．そのためにまず Maxwell 方程式を変形し，本論文で扱う球面波で適応しやすい形にしておく．

数学的なベクトル場の定理，「発散がゼロになるようなベクトル場は，別のベクトル場の回転で書ける」ことを使い，式 (2) を変形する．すなわち，磁界 $\boldsymbol{B}$ は発散がゼロであるので，

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5}$$

のように，あるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の回転で表すことができる．これを式 (3) に代入し，

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

が得られる．ここで，数学的なベクトル場のもう一つの定理，「回転がゼロになるようなベクトル場は，スカラ場の勾配で書ける」ことを利用する．すなわち，あるスカラポテンシャル関数 ϕ を用いて，

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi \tag{7}$$

とおける [3]．

次に電流密度と変位電流密度の関係について，式 (4) の両辺の発散をとる．数学的にベクトル場の回転の発散は恒等的にゼロであるから，$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0$ より，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=0 \tag{8}$$

が得られる．これは電流における連続の方程式の基となる関係を表している．以上をまとめると表 1 のようになる．

表 1　球面波のための Maxwell 方程式
Table 1　Maxwell's equations for a spherical wave.

名称	球面波で使う式	基になる Maxwell 方程式
ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$	$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
スカラポテンシャル ϕ	$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
電流密度と変位電流密度の関係	$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = 0$	$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

3. 球面波の電気的性質

3.1 球面波のスカラポテンシャル

点電荷 q_0 が作るスカラポテンシャルは静電位 V のことである．

$$V = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9}$$

この場合，静電界 $\boldsymbol{E}_{static}$ は，$-dV/dr$ より r 方向の成分のみをもち，r 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_r$ として，

$$\boldsymbol{E}_{static} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}_r \tag{10}$$

と表される．

そこで，球面波のスカラポテンシャル ϕ を次式で定義する [3]．

$$\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{11}$$

これは，式 (9) の静電位に位相項 $e^{i(\omega t \mp kr)}$ を付加したものである．ω は角周波数であり時間的位相を表し，k は波数であり空間的位相を表している．

また，位相項 $e^{i(\omega t - kr)}$ は外向きの球面波を表し，時間的に変化する電荷 $q_0 e^{i\omega t}$ の遅延ポテンシャルと捉えることもできる．同様に位相項 $e^{i(\omega t + kr)}$ は内向きの球面波を表す．一般に内向き球面波は想定しにくいことから，外向きの球面波のみを物理的実在と考え，内向きの球面波を扱わないことが多い．本論文ではどちらも対等に扱い，位相項を $e^{i(\omega t \mp kr)}$ とし，複号同順として計算する．

3.2 球面波のベクトルポテンシャル

スカラポテンシャル ϕ の勾配を計算する．球の対称性から r 方向の成分だけをもち，

$$-\nabla\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}_r \pm ik\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r \tag{12}$$

となる．これが，式 (7) が示すように，電界 $\boldsymbol{E}$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の時間変化の和に等しい．

スカラポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は，式 (5) と式 (7) を満たす範囲内で，両者の定め方には自由度がある．そこで電界 $\boldsymbol{E}$ を，位相項 $e^{i(\omega t \mp kr)}$ を除いたときに静電界の式 (10) と等しくなるように，

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}_r \tag{13}$$

と定義する．その上で，式 (7) を満たすようにベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を定める．すなわち，式 (12) 右辺第 2 項を $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ とおき，

$$\boldsymbol{A} = \pm\frac{k}{\omega}\cdot\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r \tag{14}$$

を得る．ただし積分定数にともなう時間依存しない成分は省略した．更に $\omega = kc$，$\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ より，

$$\boldsymbol{A} = \pm\mu_0 c\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r}\boldsymbol{u}_r \tag{15}$$

と表すこともできる．

磁界 $\boldsymbol{B}$ は式 (5) のようにベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転で表される．ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は半径 r 方向の成分しかもたないこと，かつ，その大きさは変数 r のみに依存し，偏角 θ や φ には依存しないことからその回転はゼロである．よって磁界 $\boldsymbol{B}$ は常に，

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

となる．

3.3 球面波の電流密度

まず式 (13) の電界 $\boldsymbol{E}$ の発散を計算する．電界 $\boldsymbol{E}$ は半径 r 方向の成分しかもたない．その成分を E_r とすれば，$E_r = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ と表される．極座標におけるベクトルの発散公式から，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \mp ik\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{17}$$

と計算できる．次に，式 (8) より電流密度の発散は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) = \mp k\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} \tag{18}$$

表 2　球面波における Maxwell 方程式の解析解
Table 2　Analytical expressions of the Maxwell's equations about a spherical wave.

名称	解析解	ϕ による表現
スカラポテンシャル ϕ	$\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}$	ϕ
ベクトルポテンシャル A	$\boldsymbol{A} = \pm\mu_0 c \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{A} = \pm\frac{1}{c}\phi\boldsymbol{u}_r$
電界 E	$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E} = \frac{1}{r}\phi\boldsymbol{u}_r$
磁界 B	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$	
電界の発散	$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \mp ik\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \mp ik\frac{\phi}{r}$
電流密度の発散	$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = \mp k\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = \mp k\omega\varepsilon_0\frac{\phi}{r}$
電流密度 J	$\boldsymbol{J} = -i\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{J} = -i\omega\varepsilon_0\frac{\phi}{r}\boldsymbol{u}_r$
変位電流密度	$\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = i\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{u}_r$	$\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon_0\frac{\phi}{r}\boldsymbol{u}_r$

となる．空間的な粗密を表す波数 k に比例し，かつ時間的な粗密を表す角周波数 ω に比例することがわかる．

電流密度 $\boldsymbol{J}$ も，球の対称性から考えて半径 r 方向の成分しかもたない．それを J_r とすれば，極座標におけるベクトルの発散公式により，$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 J_r)$ である．式 (18) より，

$$
\begin{aligned}
r^2 J_r &= \mp\int k\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi}dr \\
J_r &= -i\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} + \frac{C_0}{r^2}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる．なお，C_0 は積分定数であり，原点から流れ出す（原点に流れ込む）直流成分を表している．定常状態では $C_0 = 0$ と考えてよい．また r 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{u}_r$ を用いて，電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，

$$
\boldsymbol{J} = -i\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{u}_r \tag{20}
$$

となる．

ところで，電界の時間変化である変位電流密度は，

$$
\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} = i\omega\frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{u}_r \tag{21}
$$

であるから，電流密度と変位電流密度の関係は，

$$
\boldsymbol{J} = -\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{22}
$$

となる．これは電流（密度）と変位電流（密度）が同量逆向きであり，中心に向かう流れと中心から放射される流れが同量であることを示している．

3.4　球面波における Maxwell 方程式の解

表 2 に球面波における Maxwell 方程式の解析解を示す．$\pm$ などの複号は同順であり，上段の符号は外向きの球面波に，下段の符号は内向きの球面波に対応している．$\boldsymbol{u}_r$ は半径 r 方向の単位ベクトルである．スカラポテンシャル ϕ を基にした「ϕ による表現」も併記している．なお，虚数単位は $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ と表されることから，ϕ などの基準となるものに対して時間的な位相が 90 度ずれているという意味で捉えることができる．

4.　む　す　び

球面波としてのスカラポテンシャルの存在を前提として，対応する電界，ベクトルポテンシャル，電流密度などを求めた．

一般に「電磁波は横波である」といわれる．あるいは「横波の電磁波しか存在しない」といわれることもある．確かに平面波や電気双極子の場合，電界や磁界は波の進行方向に対して垂直方向を向くため，横波である．しかしながら，球面波における電界 $\boldsymbol{E}$ は，半径方向に振動している．つまり波の進行方向に対して平行に振動するので，縦波であるといえる [4]．磁界 $\boldsymbol{B}$ は常に 0 であるが，その代わりベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が活躍し，電界 $\boldsymbol{E}$ と同様に縦波となっている．

文　　献

[1] 戸上良弘，“複素振幅をもつ球面波における Maxwell 方程式，” 帝塚山学院大学研究年報，vol.14, pp.1–8, 2012.

[2] 細野敏夫，田中嘉津夫，“電磁界理論における解析手法の変遷と将来展望―電磁理論の諸問題と計算電磁気学における数値解析，” 信学論（C），vol.J92-C, no.8, pp.314–324, Aug. 2009.

[3] 岡部洋一，電磁気学の意味と考え方，講談社サイエンティフィック，東京，2008.

[4] 細野敏夫，“静電界の平面波展開について，” 信学論（C-I），vol.J82-C-I, no.5, pp.279–282, May 1999.

付　　録

1. 極座標におけるベクトル公式

f をスカラー関数，$\boldsymbol{F}$ をベクトル関数，極座標における単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_\theta$，$\boldsymbol{u}_\varphi$ とする．ベクトル $\boldsymbol{F}$ は極座標系の成分表示で，

$$\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{u}_r + F_\theta \boldsymbol{u}_\theta + F_\varphi \boldsymbol{u}_\varphi \tag{A·1}$$

と表されるものとする．

1.1 関数 f の勾配

$$\nabla f = \boldsymbol{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \boldsymbol{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{A·2}$$

1.2 ベクトル $\boldsymbol{F}$ の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} \tag{A·3}$$

1.3 ベクトル $\boldsymbol{F}$ の回転

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}_r \left[\frac{1}{r\sin\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi} \right\} \right] + \boldsymbol{u}_\theta \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}F_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) \right] + \boldsymbol{u}_\varphi \left[\frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}F_r \right\} \right] \tag{A·4}$$

（平成 25 年 6 月 3 日受付，26 年 1 月 14 日公開）